Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda I

Problema 1.

Dacă ABGH, BCFG, CDEF sunt pătrate congruente, aflaţi măsura unghiului dintre dreptele AF și HD.

Soluție: Fie $AH \cap HD = \{T\}$ și construim în exterior pătratul $CPQD$ .Observăm ușor că avem $\Delta FHA \equiv \Delta QEF \Rightarrow [AF] \equiv [FQ] \Rightarrow \Delta AFQ$ dreptunghic isoscel deci $m(\sphericalangle FAQ) = 45^\circ$. Din $[AH] \equiv [DQ]$ și $AH \parallel DQ$ obţinem $AHDQ$ paralelogram deci $AQ \parallel HD$ și de aici $m(\sphericalangle FAQ) = m(\sphericalangle FTD) = 45^\circ$.

$$R: m(\sphericalangle FTD) = 45^\circ$$

Problema 2.

Calculaţi partea întreagă a numărului $x = \left(\sqrt{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + ... 28\cdot 29\cdot 30}\right) : 10$.

Soluție: Radicalul se poate scrie :

$$\sqrt{(2-1)\cdot 2\cdot (2+1) + (3-1)\cdot 3\cdot (3+1) + ... + (29-1)\cdot 29\cdot (29+1)} = \sqrt{2^3 - 2 + 3^3 - 3 + ... + 29^3 - 29} =$$

$$= \sqrt{\left(1^3 + 2^3 + ... + 29^3\right) - (1 + 2 + ... + 29)} = \sqrt{\frac{29^2\cdot 30^2}{4} - \frac{29\cdot 30}{2}} = \sqrt{29^2\cdot 15^2 - 29\cdot 15} =$$

$$= \sqrt{29\cdot 15\cdot (29\cdot 15 - 1)} = \sqrt{435\cdot 434} = 434,...$$ de unde obţinem ușor $x = 43,4...$ și răspunsul final $[x] = 43$.

$$R: [x] = 43$$

Problema 3.

Calculaţi restul împărţirii numărului $a = 2017^{18\cdot n} + 96^{12\cdot n} + 9$ la 19.

Soluție: Evident 19 și 2017 sunt numere prime și cu teorema lui Fermat avem:

$2017^{18} \equiv 1 (\mathrm{mod} 19)$ deci $2017^{18\cdot n} \equiv 1 (\mathrm{mod} 19)$

și apoi $96^{12\cdot n} = (95+1)^{12\cdot n} = M_{19} + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod} 19)$ de unde se obţine restul $r = 11$.

$$R: r = 11$$